**Funcións e sistemas non lineares**

**Funcións**

* Unha **función lineal** é unha función polinómica de primeiro grao, cuxa gráfica se corresponde cunha recta. Unha función lineal correspóndese coa ecuación y = mx + b.
* Entón, unha **función non lineal** será aquela que non cumpre esta definición.
* Para analizar funcións, un proceso moi útil será atopar as súas **raíces:** os puntos xi do dominio para os cales f(xi) = 0.

**Localización de raíces**

* Sexa unha función lineal ou lineal, as raíces atópase igualando f(x)=0 e despexando x.
* Se no canto de tratarse dunha ecuación consideramos un sistema de n ecuacións (f: Rn → Rn), procuramos unha serie de solucións, *x* = (*x*1, …, *x*n)t tal que f(x) = 0.
* Podemos atopar problemas para atopar as raíces cando a solución resulta ser un número complexo, isto significará que a gráfica de f(*x*) non corta ao eixo x.

**Métodos de converxencia garantida**

* Dispoñemos dunha serie de ferramentas que se poden empregar para atopar raíces con maior facilidade, para aproximar a súa posición ou para demostrar a súa existencia.
* **Teorema do Valor Intermedio**: Sexa f:[a,b] → R unha función continua no intervalo [a,b], e sexa f(a)<f(b). Entón, para cada valor intermedio z tal que f(a)<z<f(b), existe α∈(a,b) tal que **f(α)=z**. O teorema é análogo para f(a)>f(b).
  + En resumo, o que obtemos deste teorema é que se f é continua en [a,b], logo acadará todos os valores que se atopen entre f(a) e f(b).
* En particular, se f(a) e f(b) teñen signos distintos, entón existirá o valor intermedio **z=0**, e polo tanto a función terá polo menos unha raíz α no intervalo (a,b).
* Ademais, se coñecemos que existe polo menos unha raíz en (a,b), e a súa derivada  **f’(x)≠0** neste intervalo, coñecemos que a raíz será **única**. Isto é porque se a derivada non se anula, o crecemento da función será constante.
* Desta forma, se f(a)·f(b)<0, f é continua en [a,b] e f’(x)≠0 para todo o intervalo (a,b), entón existe unha **única α** no intervalo (a,b) tal que **f(α)=0.**

**Método de bisección**

* Unha vez coñecemos que existe unha raíz nun intervalo, debemos procurar localizar o punto concreto no que se atopa, ou aproximalo o máximo posible. Para isto empregaremos distintos métodos de aproximación.
* O **método de bisección** pódese aplicar cando f∈C([a,b]) tal que f(a)·f(b)<0, sendo xa:=a e xb:=b.
  + Tomamos xr:= , é dicir, o punto intermedio entre xa e xb. Existen tres posibilidades:
    - **f(xa)·f(xr)=0**: Entón a raíz será xr, finalizando o proceso, pois sabemos que f(xa)≠0, e para que o anterior sexa 0, f(xr) terá que ser igual a 0.
    - **f(xa)·f(xr)<0**: A función ten unha raíz en (xa, xr). Repetimos o método neste intervalo, redefinindo xb como xr. E así reducimos o intervalo á primeira metade.
    - **f(xa)·f(xr)>0**: A función ten unha raíz en (xr, xb), dado que f(xa)·f(xr)>0 implica que f(xb)·f(xr)<0. Repetimos o método neste intervalo, redefinindo xa como xr. Redúcese o intervalo á segunda metade.
  + Sendo k o número de pasos realizados e o valor xk = xr calculado en cada paso:
    - A cota de error deste método será ek=|α-xk|(½)k·(b-a).
    - Entón, sendo α a raíz que procuramos, α =
    - O proceso repetirase reducindo o erro cometido á metade en cada paso. Entón, podemos repetir este método ata que o valor do erro, ek (½)k·(b-a), sexa menor que unha cota máxima pedida (a cal será distinta segundo a precisión que requiramos) ou cando f(xk) sexa moi próximo a 0.
  + Un tipo de exercicio posible sería atopar o k necesario para que o erro cometido sexa menor que un valor dado, por exemplo, ε.
    - Para resolver este exercicio, resolveríamos a inecuación < 2k.
    - Aplicamos logaritmo neperiano en ambos lados da inecuación. Isto pódese realizar debido a que o logaritmo neperiano é unha función crecente no seu dominio, así que a desigualdade mantense. De ser unha función decrecente, cambiaríase o < por un >.
    - Obtemos que k > ln ( ) / ln 2.
    - Cabe destacar que sería posible neste caso empregar, por exemplo, logaritmo en base 2 para facilitar os cálculos, mais polo xeral a maioría de linguaxes operan en función de logaritmos neperianos de maneira xenérica.
* Este método é máis lento ca outros, mais a converxencia con el está garantida. Ademais, é só aplicable ao caso de unha soa ecuación.

**Métodos de converxencia veloz**

* Unha sucesión { xk }k€N que converxe a α dise **converxente con orde p>=1** se **|α-xk+1| <= C\*|α-xk|p**  ∀k, para algunha constante C>0
* Canto maior p, máis rapido converxe.
* p=1: converxencia lineal, p=2: converxencia cuadrática.

**Métodos de Newton-Raphson (conv. cuadrática)**

* Emprégase unha recta tanxente a f para aproximar a súa gráfica, cerca do punto onde se anula a función.
* f(x) = f(xk) + f’(xk)(x-xk)
* Para calcular a raíz de f(x), f(x) = f(xk) + f’(xk)(x-xk) = 0
  + Sexa xk+1 := x
* xk+1 := xk - , k=0,1,2… Débese considerar un intervalo no que f’(xk)!=0, mais se a recta tanxente fose horizontal non cortaría ao eixo X e non teria raíces (a non ser que coincida co mesmo)
* Método máis rapido pero non garantizado. Débense empregar teoremas para asegurar que a raíz é única.

**Teoremas**

* Sexa f€C2([a,b]) cunha raiz α€(a,b) e sexan m1 e M2 tales que  e . Supoñamos que m1>0.
* Sexa { xk } a sucesión obtida polo metodo de Newton-Raphson.
* Supoñamos que xk € [a,b] Entón:
* 
  + Entón, se se escolle un x0 inicial suficientemente próximo a α, dase a converxencia con **orde 2**.
    - Suficientemente próximo: se se cumple que 
* Para calcular a raíz cun error menor que ε, continúase ata que 

**Método da secante**

* Consiste en reemplazar a derivada polo cociente incremental en funcións nas que é dificil calcular a derivada.
* O seu erro é  con  (menor a NR)